efrei GROUPE Enseignement supérieur esigetel PARIS SUD École d'ingénieur des sciences du numérique	**Contrôle L3** **Théorie du signal** **corrigé**	**Année : 2015-2016** Date : 15/01/2016 Sans documents 1h45

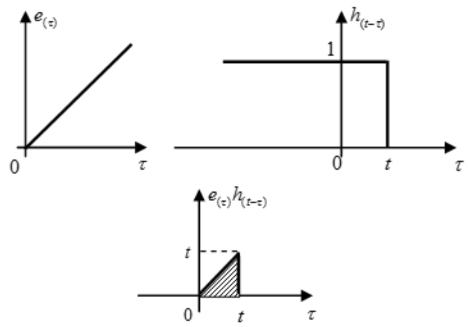
1-Convolution

Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un système linéaire et $e(t)$ le signal d'entrée. Déterminer le signal de sortie en utilisant le produit de convolution : $e(t)=tu(t) \quad et \quad h(t)=u(t)$

NB : $u(t)$ est l'échelon unité ou distribution d'Heaviside qui vaut 1 seulement quand $t\rangle 0$, 0 sinon

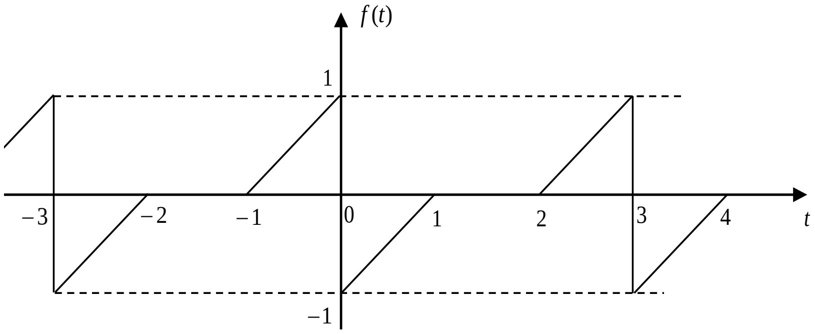
Solution : $s(t)=h(t)*e(t)=\int\limits_{\mathbb{R}} h(t-\tau)e(\tau)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}} u(t-\tau)\tau u(\tau)d\tau \qquad \begin{matrix} u(\tau)=0 \quad si\ \tau\langle 0 \quad ;u(\tau)=1 \quad si\ \tau\rangle 0 \\ u(t-\tau)=0 \quad si\ \tau\rangle t \quad ;u(t-\tau)=1\ si\ \tau\langle t \end{matrix}$

$$s(t)=\int_0^t \tau d\tau=\frac{t^2}{2}u(t)$$



2-Série de Fourier

Donner une décomposition en série de Fourier de la fonction $f(t)$ puis calculer les 3 premiers coefficients et tracer le spectre du module des coefficients C_n



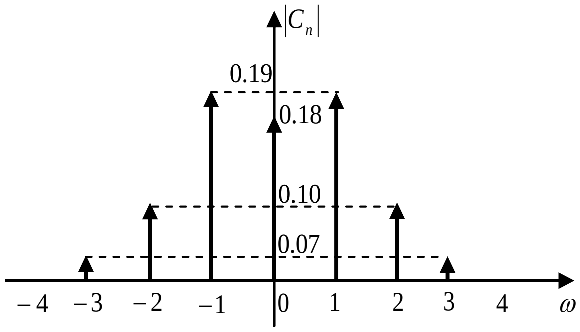
Solution : La fonction $f(t)$ est impaire, les coefficients a_n sont nuls. L'intégration sera faite sur une demi-période.

La fonction étant définie par parties, il convient de scinder l'intervalle d'intégration en 2 : $[0,1]\cup\left[1,\frac{3}{2}\right]$

La période est $T=3$, la pulsation fondamentale vaut donc $\omega_0=\frac{2\pi}{3}$

$$a_0=a_n=0;\quad b_n=\frac{-2}{n\pi}+\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}$$
$$f(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n}+\frac{3}{\pi n^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{2n\pi}{3}t$$

Le spectre complexe vaut : $C_n=-\frac{j}{2}b_n$ ne comprend que des composantes imaginaires pures. Il sera représenté par un seul graphique.



3-Transformée de Fourier

3.1 $u(t)$ est l'échelon unité ou distribution d'Heaviside qui vaut 1 seulement quand $t\rangle 0$

Sachant que $\mathcal{F}\left[e^{-\alpha t}u(t)\right]=\frac{1}{\alpha+j\omega}$, donnez la transformée de Fourier de $te^{-\alpha t}u(t)$

Solution : $\mathcal{F}\left[te^{-\alpha t}u(t)\right]=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$

3.2 Soit la fonction $f_{1(t)}=\begin{cases}\frac{t}{\tau} & t\in[0,\tau]\\ 0 & t\notin[0,\tau]\end{cases}$

Donnez sa transformée de Fourier

Solution : $\boxed{F_{1(j\omega)}=\frac{1}{\tau\omega^2}\left[e^{-j\omega\tau}(1+j\omega\tau)-1\right]}$

4- Echantillonnage

Un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert :

$$H(j\omega)=H_0e^{-j\omega t_0}\prod\nolimits_{2\omega_0}(\omega)$$

Est utilisé comme filtre d'interpolation pour le signal échantillonné suivant :

$$x_e(t)=Tx(t)\delta_T(t)\quad\text{avec}\quad T<\frac{\pi}{\omega_0}$$

Le signal $x(t)$ est à bande limitée, c'est-à-dire que $X(j\omega)=0$ pour $|\omega| > \omega_0$.

Démontrer que la réponse du filtre est donnée par :

$$y(t)=H_0x(t-t_0)$$

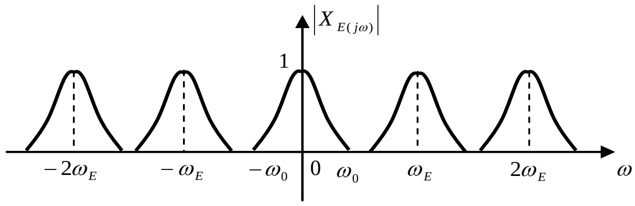
Solution :

Si le spectre de $x(t)$ est à support borné et si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à la fréquence de Shannon, le spectre du signal échantillonné peut s'écrire :

$$X_e(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega-n\omega_e\right) \quad \omega_e=\frac{2\pi}{T}$$

ou en fréquence

$$X_e(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-nf_e\right) \quad f_e=\frac{1}{T}$$

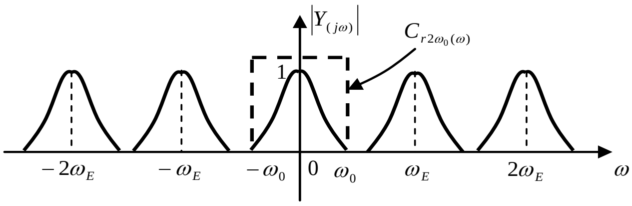


A la sortie du filtre, nous pouvons écrire :

$$Y_{(j\omega)}=H_0e^{-j\omega t_0}X_{(j\omega)}$$

$$Y(j\omega)=H_0e^{-j\omega t_0}\prod_{2\omega_0}(\omega).\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega-n\omega_e\right)$$

Soit :



Que l'on peut écrire sous la forme : $\underline{Y(j\omega)=H_0\left(j\omega\right)e^{-j\omega t_0}X\left(j\omega\right)}$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$\underline{y(t)=H_0x(t-t_0)}$$